

Chapitre 5 : Valeurs propres et vecteurs propres

5.1 Introduction et motivation

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les applications linéaires $T : V \rightarrow W$ et leur représentation matricielle. Nous allons maintenant nous concentrer sur un cas particulier fondamental : les applications linéaires d'un espace vers lui-même, c'est-à-dire $T : V \rightarrow V$. Nous avons vu que si V est de dimension n , muni d'une base \mathcal{B} , alors il existe une matrice A associée à T et \mathcal{B} . Par conséquent, nous pouvons restreindre ce chapitre à l'étude des applications linéaires $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Si nous appliquons cette matrice à différents vecteurs de \mathbb{R}^2 , nous observons des comportements variés :

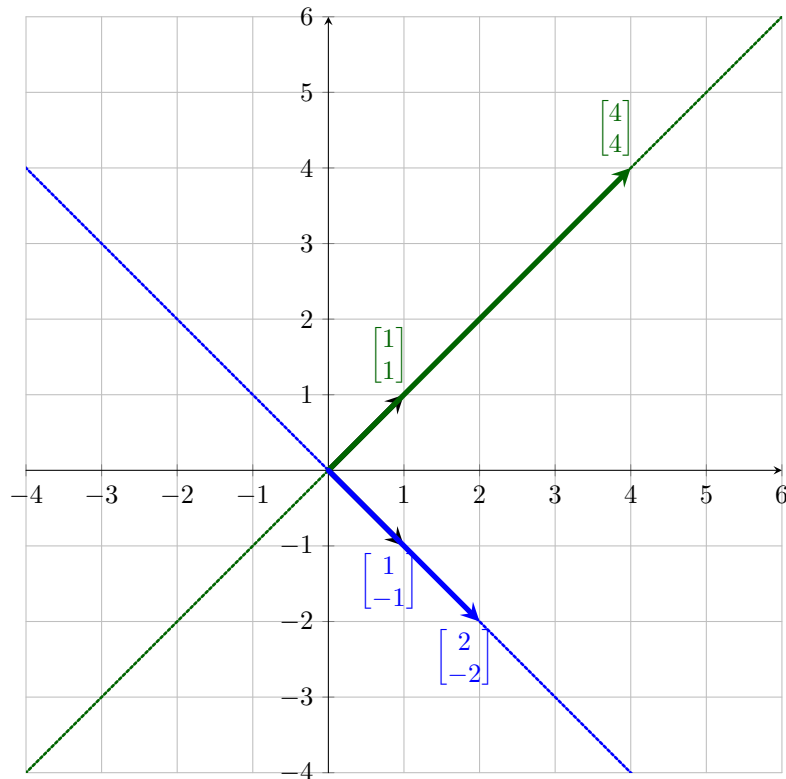
$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarquons que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a un comportement particulier : il est simplement multiplié par 4. De même :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, par linéarité, tous les vecteurs de la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont colinéaires à leur image, avec un coefficient 4. Et tous les vecteurs de la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont colinéaires à leur image, avec un coefficient 2.

Ces vecteurs spéciaux, qui restent sur la même droite après transformation, et par extension ces deux droites spéciales, qui restent inchangées après transformation, jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire et ont de nombreuses applications pratiques.



5.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1

Vecteur propre et valeur propre

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Un vecteur non nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est appelé *vecteur propre* de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Le scalaire λ est alors appelé la *valeur propre* de A associée au vecteur propre \vec{v} .

- Remarques 5.5.0.2.**
1. Le vecteur nul $\vec{0}$ vérifie toujours $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ pour tout λ . C'est pourquoi on exige que $\vec{v} \neq \vec{0}$ dans la définition.
 2. Géométriquement, un vecteur propre est un vecteur dont la direction est préservée par la transformation (il peut être dilaté, contracté ou inversé).
 3. Si \vec{v} est un vecteur propre associé à λ , alors tout multiple non nul $c\vec{v}$ est aussi un vecteur propre associé à la même valeur propre λ .

Exemples. 1. Vérifions que $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 2 \\ 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6\vec{v}$$

Donc \vec{v} est bien un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 6$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ est aussi vecteur propre, associé à la valeur propre 1.

2. Pour la matrice identité $\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Détermination des valeurs propres

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice, nous devons résoudre l'équation $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Théorème 5.3

Caractérisation des valeurs propres

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si :

$$(A - \lambda\mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$$

admet une solution non triviale $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Ceci est équivalent à dire que la matrice $(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ n'est pas inversible.

Démonstration. L'équation $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ peut se réécrire :

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\mathbb{I}_n\vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{I}_n)\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Pour que cette équation admette une solution $\vec{v} \neq \vec{0}$, il faut et il suffit que le système homogène associé à $(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ ait une infinité de solutions, c'est-à-dire que $(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ ne soit pas inversible (d'après le théorème 2.23). \square

Corollaire 5.4

λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda\mathbb{I}_n) = 0$.

Exemples. 1. Trouvons les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Nous devons résoudre $\det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$:

$$A - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = (2 - \lambda)(-\lambda) - 3(1) = -2\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Réolvons $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$.

2. Pour $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\det(B - \lambda \mathbb{I}_2) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2$$

$$= 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

3. Pour une matrice 3×3 : $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique se calcule par développement selon la deuxième colonne (qui contient deux zéros) :

$$\det(C - \lambda \mathbb{I}_3) = (3 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 1] = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$= (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = -(3 - \lambda)^2(\lambda - 1)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Définition 5.5

Polynôme caractéristique et multiplicité algébrique

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

— Le *polynôme caractéristique* de A , noté $p_A(\lambda)$, est défini par :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$$

C'est un polynôme de degré n en λ .

— La *multiplicité algébrique* d'une valeur propre λ , notée $m_a(\lambda)$, est sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique.

Exemple. Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$

En développant selon la troisième colonne :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (5 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 4] \\ &= (5 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 5) \\ &= -(5 - \lambda)^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 = 1$ avec $m_a(1) = 1$ et $\lambda_2 = 5$ avec $m_a(5) = 2$.

Remarques 5.5.0.6. 1. Les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

2. Le polynôme caractéristique peut avoir des racines complexes non réelles (qui apparaissent par paires conjuguées). Dans ce cas, la matrice a aussi des valeurs propres complexes, mais nous n'aborderons pas cela en détails dans ce cours. Par exemple, la matrice de rotation

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\lambda^2 + 1$, dont les racines sont $\pm i$.

Définition 5.7

Trace d'une matrice

La trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $n \times n$, notée $\text{Tr}(A)$, est la somme des éléments de sa diagonale :

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Exemples. 1. $\text{Tr} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2 + 4 + (-3) = 3$

2. Pour une matrice 2×2 , $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$$

3. Pour une matrice 3×3 , $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$:

Le polynôme caractéristique est :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b & c \\ d & e - \lambda & f \\ g & h & i - \lambda \end{bmatrix}$$

En développant complètement, on obtient :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + (a + e + i)\lambda^2 - (ae - db + ai - gc + ei - hf)\lambda + \det(A)$$

On constate que le coefficient de λ^2 est :

$$a + e + i = \text{Tr}(A)$$

De même, le terme constant (obtenu en posant $\lambda = 0$) est $\det(A)$.

Ainsi, pour une matrice 3×3 :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Tr}(A)\lambda^2 - \sigma_2\lambda + \det(A)$$

où $\sigma_2 = \det \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}$ est la somme des mineurs principaux 2×2 .

Théorème 5.8

Valeurs propres et inversibilité

Soit A une matrice carrée. Alors :

1. 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.
2. Si A est inversible et λ est valeur propre de A , alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} .
3. Si λ est valeur propre de A , alors λ^k est valeur propre de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Si λ est valeur propre de A , alors λ est valeur propre de A^T .

Démonstration. 1. 0 est valeur propre $\Leftrightarrow \det(A - 0 \cdot \mathbb{I}_n) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ n'est pas inversible.

2. Si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors :

$$\vec{v} = A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda A^{-1}\vec{v}$$

Donc $A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$.

3. Si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, alors $A^2\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$.

Par récurrence, $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$.

4. $\det(A^T - \lambda\mathbb{I}_n) = \det((A - \lambda\mathbb{I}_n)^T) = \det(A - \lambda\mathbb{I}_n)$.

□

Théorème 5.9

Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale.

Exemples. Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, les valeurs propres sont 3, -1, 2, 4.

5.2.1 Détermination des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres trouvées, nous pouvons déterminer les vecteurs propres associés.

Définition 5.10

Espace propre et multiplicité géométrique

Soit λ une valeur propre de la matrice A .

- L'espace propre associé à λ , noté E_λ , est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ , ainsi que le vecteur nul :

$$E_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \text{Ker}(A - \lambda\mathbb{I}_n)$$

- La multiplicité géométrique de λ , notée $m_g(\lambda)$, est la dimension de l'espace propre E_λ .

Remarques 5.5.0.11. E_λ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n (c'est le noyau de la matrice $A - \lambda\mathbb{I}_n$). Sa dimension est au moins 1 puisque λ est valeur propre, donc $1 \leq m_g(\lambda)$.

Exemples. 1. Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$:

Pour $\lambda_1 = 3$:

$$A - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_2$, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $m_g(3) = 1$.

Pour $\lambda_2 = -1$:

$$A + \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_2 = -3x_1$, donc $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$ et $m_g(-1) = 1$.

2. Pour $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$:

Pour $\lambda_1 = 2$:

$$B - 2\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_2$, donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Pour $\lambda_2 = 3$:

$$B - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = 2x_2$, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

3. Pour $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$:

Pour $\lambda_1 = 1$:

$$C - \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 0$, donc $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $m_g(1) = 1$.

Pour $\lambda_2 = 3$:

$$C - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_3$ et x_2 libre, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $m_g(3) = 2$.

Théorème 5.12

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Pour toute valeur propre λ : $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Démonstration. Admis. □

Théorème 5.13

Indépendance linéaire des vecteurs propres

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de vecteurs propres.

Un seul vecteur propre non nul est linéairement indépendant.

Supposons que k vecteurs propres $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ associés à des valeurs propres distinctes

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ soient linéairement indépendants.

Soit \vec{v}_{k+1} un vecteur propre associé à $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$ pour tout $i \leq k$.

Supposons qu'il existe c_1, \dots, c_{k+1} tels que :

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k + c_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \quad (*)$$

En appliquant A :

$$c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \lambda_k \vec{v}_k + c_{k+1} \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \quad (**)$$

En calculant $(**) - \lambda_{k+1} (*)$:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \vec{v}_1 + \dots + c_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \vec{v}_k = \vec{0}$$

Par hypothèse de récurrence et comme $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, on a $c_i = 0$ pour tout $i \leq k$. Donc $(*)$ devient $c_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0}$, ce qui implique $c_{k+1} = 0$. □

5.3 Diagonalisation

5.3.1 Matrices semblables

Définition 5.14

Matrices semblables

Deux matrices carrées A et B de même taille sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$B = P^{-1}AP \quad \text{ou de manière équivalente} \quad A = PBP^{-1}$$

Théorème 5.15

Propriétés des matrices semblables

Si A et B sont semblables, alors :

1. Elles ont le même polynôme caractéristique.
2. Elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités algébriques).
3. $\det(A) = \det(B)$ et $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.
4. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

Démonstration. Soit $B = P^{-1}AP$ avec P inversible.

1. $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{I}_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda\mathbb{I}_n)P) = \det(A - \lambda\mathbb{I}_n) = p_A(\lambda)$
2. Découle de (1).
3. $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

Pour la trace, montrons d'abord que $\text{Tr}(CD) = \text{Tr}(DC)$ pour toutes matrices C, D :

Si $C = (c_{ij})$ et $D = (d_{ij})$, alors $(CD)_{ii} = \sum_k c_{ik}d_{ki}$ et $(DC)_{jj} = \sum_k d_{jk}c_{kj}$. Donc $\text{Tr}(CD) = \sum_i \sum_k c_{ik}d_{ki} = \sum_k \sum_i d_{ki}c_{ik} = \text{Tr}(DC)$.

Ainsi : $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A(P^{-1}P)) = \text{Tr}(A)$.

4. $B\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow P^{-1}AP\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A(P\vec{x}) = \vec{0}$. Comme P est inversible, $\dim(\text{Ker}(B)) = \dim(\text{Ker}(A))$, donc $\text{rang}(B) = \text{rang}(A)$.

□

Remarque importante 5.16

La réciproque est fautive : deux matrices peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans être semblables. Par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ont toutes deux $(1 - \lambda)^2$ comme polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables (car $B = \mathbb{I}_2$ et la seule matrice semblable à \mathbb{I}_2 est \mathbb{I}_2 elle-même).

5.3.2 Matrices diagonalisables

Définition 5.17

Matrice diagonalisable

Une matrice carrée A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale D , c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = D$$

où D est diagonale.

Le lien avec les vecteurs propres est donné par le théorème fondamental suivant :

Théorème 5.18

Théorème de diagonalisation

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de A .

Dans ce cas, si $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ où les \vec{v}_i sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres λ_i , alors :

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons A diagonalisable. Il existe P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

Multiplions à gauche par P : $AP = PD$.

Écrivons $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Le produit matriciel donne : $AP = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix}$, et $PD = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}$.

Donc $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ pour tout i , donc les colonnes de P sont bien des vecteurs propres de A .

Comme P est inversible, ses colonnes sont linéairement indépendantes (Théorème 2.23), donc forment une base de \mathbb{R}^n .

(\Leftarrow) La démonstration inverse suit le même raisonnement. \square

Remarques 5.5.0.19. La matrice P est une matrice de changement de base : elle transforme la base canonique en une base de vecteurs propres. Dans cette nouvelle base, l'application linéaire associée à A a une représentation diagonale très simple.

Corollaire 5.20

Si une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Démonstration. D'après le théorème d'indépendance linéaire, n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes forment une base de \mathbb{R}^n . \square

Remarque importante 5.21

La réciproque est fautive : une matrice peut être diagonalisable sans avoir toutes ses valeurs propres distinctes.

Théorème 5.22*Critère de diagonalisabilité*

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si les deux points suivants sont satisfaits :

1. Toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles (i.e., la somme des multiplicités algébriques des racines réelles égale n).
2. Pour chaque valeur propre λ , on a $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons A diagonalisable de taille $n \times n$.

Il existe une base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes. Pour chaque λ_i , notons :

— $\mathcal{B}_i = \{\vec{v}_j \in \mathcal{B} : A\vec{v}_j = \lambda_i \vec{v}_j\}$

— k_i le nombre de vecteurs dans \mathcal{B}_i

Comme $\mathcal{B}_i \subset E_{\lambda_i}$ et \mathcal{B}_i est linéairement indépendant :

$$k_i \leq \dim(E_{\lambda_i}) = m_g(\lambda_i)$$

Puisque $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ est une base de \mathbb{R}^n :

$$n = \sum_{i=1}^r k_i \leq \sum_{i=1}^r m_g(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^r m_a(\lambda_i)$$

Or le polynôme caractéristique est de degré n , donc $\sum_{i=1}^r m_a(\lambda_i) \leq n$ (la somme des multiplicités est inférieure au degré du polynôme).

De $n \leq \sum m_g(\lambda_i) \leq \sum m_a(\lambda_i) \leq n$, on obtient :

1. $\sum m_a(\lambda_i) = n$ (toutes les racines sont réelles)
2. $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ pour tout i

(\Leftarrow) Si les conditions sont vérifiées : Pour chaque λ_i , on prend une base \mathcal{B}_i de E_{λ_i} avec $\dim(E_{\lambda_i}) = m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$.

L'union $\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_i$ contient $\sum m_a(\lambda_i) = n$ vecteurs.

Ces vecteurs sont linéairement indépendants (vecteurs propres de valeurs propres distinctes et bases d'espaces propres).

Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres. □

5.3.3 Méthode de diagonalisation

Méthode 5.23

Diagonalisation d'une matrice

Pour diagonaliser une matrice A de taille $n \times n$:

1. **Calculer le polynôme caractéristique** $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$.
2. **Trouver les valeurs propres** en résolvant $p_A(\lambda) = 0$.
3. **Pour chaque valeur propre** λ_i :
 - Déterminer sa multiplicité algébrique $m_a(\lambda_i)$.
 - Calculer l'espace propre E_{λ_i} en résolvant $(A - \lambda_i \mathbb{I}_n) \vec{v} = \vec{0}$.
 - Trouver une base de E_{λ_i} et déterminer $m_g(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$.
4. **Vérifier la diagonalisabilité** :
 - Si $\sum m_a(\lambda_i) < n$: non diagonalisable (racines complexes).
 - Si $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$ pour au moins un i : non diagonalisable.
 - Sinon : diagonalisable.
5. **Si diagonalisable**, former :
 - P = matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres.
 - D = matrice diagonale avec les valeurs propres correspondantes.

5.3.4 Exemples de diagonalisation

Exemple (Matrice 2×2 avec valeurs propres distinctes). Diagonalisons $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

1. **Polynôme caractéristique** :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (5 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

2. **Valeurs propres** :

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0$$

Donc $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 2$.

3. **Espaces propres** :

Pour $\lambda_1 = 7$:

$$A - 7\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $2x_1 = 3x_2$, donc $E_7 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Pour $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = -x_2$, donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

4. **Diagonalisation** :

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple (Matrice 3×3 avec valeur propre multiple). Diagonalisons $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Polynôme caractéristique : Comme A est triangulaire supérieure :

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda)$$

2. Valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ (double) et $\lambda_2 = 3$ (simple).

3. Espaces propres :

Pour $\lambda_1 = 2$:

$$A - 2\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_2 = -x_3$ et x_1 libre, donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $m_g(2) = 2 = m_a(2)$

Pour $\lambda_2 = 3$:

$$A - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_2$ et $x_3 = 0$, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. $m_g(3) = 1 = m_a(3)$

4. Diagonalisation :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemple (Matrice non diagonalisable). Montrons que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Polynôme caractéristique : $p_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3$

Valeur propre : $\lambda = 3$ avec $m_a(3) = 3$.

Espace propre :

$$A - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_2 = x_3 = 0$ et x_1 libre, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

$m_g(3) = 1 < 3 = m_a(3)$, donc A n'est pas diagonalisable.

Exemple (Matrice symétrique). Diagonalisons $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Polynôme caractéristique : En développant, on trouve : $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$.

Espaces propres : - $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ - $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ - $E_4 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.4 Applications

5.4.1 Calcul de puissances de matrices

Si A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$, alors :

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Cette formule est très efficace car D^k est simplement :

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Exemple. Pour $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ avec $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$:

$$A^{100} = P \begin{bmatrix} 7^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} P^{-1}$$

En particulier :

$$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16807 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10097 & 10065 \\ 6710 & 6742 \end{bmatrix}$$

Exemple (Application aux suites récurrentes). Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{avec } u_0 = 1, v_0 = 0$$

Posons $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Donc $X_n = A^n X_0$. Avec la diagonalisation de A :

$$X_n = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après calcul :

$$u_n = \frac{3 \cdot 7^n + 2 \cdot 2^n}{5}, \quad v_n = \frac{2 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n}{5}$$

5.4.2 Applications géométriques

Exemples (Rotation dans le plan). La matrice de rotation d'angle θ :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique :

$$p_{R_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cos \theta \cdot \lambda + 1$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$ (complexes si $\theta \neq 0, \pi$).

Pour $\theta = \pi$ (rotation de 180), $R_\pi = -\mathbb{I}_2$ est diagonale avec $\lambda = -1$ (double).

Exemples (Symétrie orthogonale). La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x \tan(\alpha)$ a pour matrice :

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont toujours $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ avec :

- E_1 = droite de symétrie
- E_{-1} = droite perpendiculaire

5.4.3 Extension aux espaces vectoriels quelconques

Définition 5.24

Valeurs et vecteurs propres d'une application linéaire

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire où V est un espace vectoriel de dimension finie.

- Un vecteur non nul $v \in V$ est un *vecteur propre* de T s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(v) = \lambda v$.
- Le scalaire λ est alors une *valeur propre* de T .
- L'espace propre est $E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$.

Exemples (Opérateur de dérivation sur les polynômes). Soit $V = \mathbb{P}_3$ et $T : V \rightarrow V$ définie par $T(p) = p'$ (dérivation).

Dans la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, la matrice de T est :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, donc la seule valeur propre est $\lambda = 0$ avec $m_a(0) = 4$.

L'espace propre $E_0 = \{p \in \mathbb{P}_3 : p' = 0\}$ est l'ensemble des polynômes constants, donc $E_0 = \text{Vect}(1)$ et $m_g(0) = 1 < 4$.

L'opérateur de dérivation n'est pas diagonalisable sur \mathbb{P}_3 .

Exemples (Application linéaire sur \mathbb{P}_2). Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p(x)) = p(2-x)$.

Pour trouver les valeurs propres, cherchons p tel que $p(2-x) = \lambda p(x)$.

- Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, alors :

$$p(2-x) = a_0 + a_1(2-x) + a_2(2-x)^2 = (a_0 + 2a_1 + 4a_2) + (-a_1 - 4a_2)x + a_2x^2$$

Dans la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, la matrice est :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 1$ (double) et $\lambda = -1$ (simple).

— $E_1 = \text{Vect}(1, x^2 - 2x)$ (polynômes symétriques par rapport à $x = 1$)

— $E_{-1} = \text{Vect}(x - 1)$ (polynômes antisymétriques)

T est diagonalisable car $m_g(1) = 2 = m_a(1)$ et $m_g(-1) = 1 = m_a(-1)$.

Exemples (Matrices 2×2 vues comme espace vectoriel). Considérons $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $T : V \rightarrow V$ définie par $T(M) = M^T$ (transposition).

Cherchons les matrices M telles que $M^T = \lambda M$:

- Si $\lambda = 1$: $M^T = M$, donc M est symétrique. $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, donc $m_g(1) = 3$.

- Si $\lambda = -1$: $M^T = -M$, donc M est antisymétrique. $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, donc $m_g(-1) = 1$.

Comme $\dim(V) = 4 = m_g(1) + m_g(-1)$, l'opérateur de transposition est diagonalisable.